



Nombres complexes

Calculer avec i , représenter un complexe et résoudre des équations sans confondre module, argument et partie imaginaire.

Sommaire

1. Forme algébrique
2. Quotient et module
3. Forme trigonométrique
4. Équations du second degré

Exercices et bilan

Trois exercices essentiels, deux défis et cinq questions. Fais les exercices avant de consulter les corrections placées à la suite. La lecture vocale est disponible dans l'application.

1. Forme algébrique

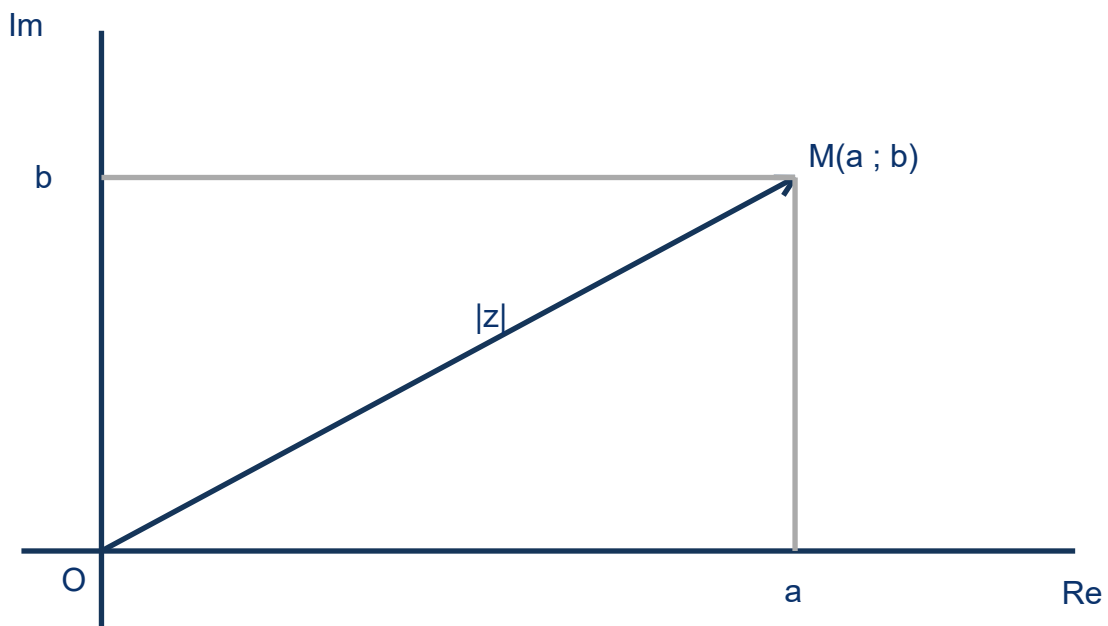
Un nombre complexe s'écrit de manière unique $z=a+ib$, avec a,b réels et $i^2=-1$. Sa partie réelle est a et sa partie imaginaire est b , qui est un réel ; ce n'est pas ib . Deux complexes sont égaux si leurs parties réelles et imaginaires sont égales. Les réels sont les complexes dont la partie imaginaire est nulle.

On additionne les parties correspondantes. Pour multiplier, on développe avec la **distributivité** puis on remplace i^2 par -1 . Le conjugué de $z=a+ib$ est $\bar{z}=a-ib$. Le produit $z\bar{z}=a^2+b^2$ est réel positif ou nul ; il est nul seulement si $z=0$.

À retenir

La règle nouvelle est $i^2=-1$; les règles de **distributivité** restent valables.

Illustration et application



Le nombre $z=a+ib$ est représenté par le point $M(a ; b)$. Le module est la distance OM .

Exemple expliqué

Développer : $(2+3i)(1-i)=2-2i+3i-3i^2$.

Utiliser $i^2=-1$: $2-2i+3i+3=5+i$.

Le conjugué de $2+3i$ est $2-3i$.



Leur produit vaut $(2+3i)(2-3i)=2^2+3^2=13$.

As-tu compris ?

Quelle est la partie imaginaire de $7-4i$?

Réponse après ton essai : -4 , et non $-4i$.



2. Quotient et module

Pour diviser par $z \neq 0$, on multiplie **numérateur** et **dénominateur** par le conjugué du **dénominateur**. Le **dénominateur** devient son module au carré. Le module $|a+ib|=\sqrt{a^2+b^2}$ est un réel positif ou nul ; il représente une distance dans le plan.

Les règles $|zw|=|z||w|$ et $|z/w|=|z|/|w|$ pour $w \neq 0$ facilitent les calculs. En général $|z+w|$ n'est pas égal à $|z|+|w|$: on dispose de l'inégalité triangulaire $|z+w| \leq |z|+|w|$. Le module ne détermine pas un complexe unique.

À retenir

Un quotient exige un **dénominateur** non nul.

Exemple expliqué

Multiplier par le conjugué du **dénominateur** : $(1+i)/(2-i)=[(1+i)(2+i)]/[(2-i)(2+i)]$.

Calculer le **numérateur** : $(1+i)(2+i)=2+3i+i^2=1+3i$.

Calculer le **dénominateur** : $(2-i)(2+i)=4+1=5$.

Résultat : $1/5+(3/5)i$.

Son module vaut $\sqrt{[(1/5)^2+(3/5)^2]}=\sqrt{10}/5$.

As-tu compris ?

Les nombres 3 et -3 ont-ils le même module ?

Réponse après ton essai : Oui : 3. Ils sont pourtant différents.



3. Forme trigonométrique

Pour $z \neq 0$, on écrit $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, avec $r = |z| > 0$. Un argument θ est défini à un multiple de 2π près. Il vérifie $\cos \theta = a/r$ et $\sin \theta = b/r$; le quadrant doit être respecté. Zéro n'a pas d'argument. On note aussi $z = re^{i\theta}$.

Lors d'un produit, les modules se multiplient et les arguments s'additionnent modulo 2π . Pour une puissance entière, $[r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$. Pour le quotient, les modules se divisent et les arguments se soustraient.

À retenir

Déterminer le quadrant avec les signes des deux parties.

Exemple expliqué

Pour $z = -1 + i\sqrt{3}$, calculer le module : $|z| = \sqrt{1+3} = 2$.

Déterminer l'argument : $\cos \theta = -1/2$ et $\sin \theta = \sqrt{3}/2$, donc $\theta = 2\pi/3$ modulo 2π .

Écrire $z = 2[\cos(2\pi/3) + i \sin(2\pi/3)]$.

Appliquer la formule de Moivre : $z^3 = 8[\cos(2\pi) + i \sin(2\pi)] = 8$.

As-tu compris ?

Un argument de $-i$?

Réponse après ton essai : $-\pi/2$, ou $3\pi/2$ modulo 2π .



4. Équations du second degré

Pour $az^2+bz+c=0$ avec $a \neq 0$, on utilise $\Delta=b^2-4ac$. Si les coefficients sont réels et $\Delta < 0$, les solutions sont $(-b \pm i\sqrt{-\Delta})/(2a)$, deux complexes conjugués. Avec des coefficients complexes, il faut d'abord trouver une racine carrée δ de Δ ; les solutions sont $(-b \pm \delta)/(2a)$.

Pour trouver $\delta=u+iv$ tel que $\delta^2=A+iB$, on peut utiliser $u^2-v^2=A$, $2uv=B$ et $u^2+v^2=\sqrt{A^2+B^2}$. Les deux racines carrées non nulles sont opposées. Contrôler par **substitution** évite les erreurs de signe.

À retenir

Un discriminant négatif exclut des solutions réelles, mais pas des solutions complexes.

Exemple expliqué

Pour $z^2-2z+5=0$, calculer $\Delta=(-2)^2-4 \times 1 \times 5=-16$.

Les solutions sont $z_1=(2+4i)/2=1+2i$ et $z_2=(2-4i)/2=1-2i$.

Vérifier z_1 : $(1+2i)^2=-3+4i$.

Ainsi $(-3+4i)-2(1+2i)+5=0$.

Les coefficients étant réels, la **solution** conjuguée $1-2i$ vérifie aussi l'équation.

As-tu compris ?

Solutions de $z^2=-9$?

Réponse après ton essai : $z=3i$ ou $z=-3i$.



Les cinq exercices

1. Produit - Essentiel

Calcule $(3-i)(2+4i)$.

2. Quotient - Essentiel

Écris $1/(1+i)$ sous forme algébrique.

3. Module et argument - Essentiel

Trouve le module et un argument de $-\sqrt{3}+i$.

4. Puissance - Défi

Calcule $(1+i)^8$.

5. Discriminant complexe - Défi

Résous $z^2=3+4i$.



1. Produit

Corrigé expliqué

1. Développer : $6+12i-2i-4i^2$.
2. Remplacer i^2 par -1 .
3. Résultat $10+10i$.



2. Quotient

Corrigé expliqué

1. Multiplier par $(1-i)/(1-i)$.
2. **Dénominateur** $1-i^2=2$.
3. Résultat $(1-i)/2$.



3. Module et argument

Corrigé expliqué

1. Module $\sqrt{3+1}=2$.
2. $\cos \theta = -\sqrt{3}/2$ et $\sin \theta = 1/2$: quadrant II.
3. $\theta = 5\pi/6$ modulo 2π .



4. Puissance

Corrigé expliqué

1. Module de $1+i$: $\sqrt{2}$, argument $\pi/4$.
2. Puissance : module $(\sqrt{2})^8=16$, argument $8\pi/4=2\pi$.
3. Résultat 16.
4. Contrôle : $(1+i)^2=2i$, puissance quatrième -4 , puissance huitième 16.



5. Discriminant complexe

Corrigé expliqué

1. Poser $z=u+iv$: $u^2-v^2=3$ et $2uv=4$.
2. Le module de $3+4i$ vaut 5, donc $u^2+v^2=5$.
3. Addition : $2u^2=8$, donc $u=\pm 2$; puis $v=2/u$.
4. Solutions $2+i$ et $-2-i$.
5. Vérifier $(2+i)^2=4+4i-1=3+4i$.



Bilan : vérifie tes acquis

1. i^2 vaut...

- A. 1
- B. -1
- C. i

2. $\text{Im}(2+3i)$ vaut...

- A. 3
- B. $3i$
- C. 2

3. Le module de i vaut...

- A. 0
- B. -1
- C. 1

4. Zéro a...

- A. Un argument nul unique
- B. Aucun argument
- C. Tous les modules

5. Conjugué de $4-i$...

- A. $-4+i$
- B. $4+i$
- C. $-4-i$



Réponses du bilan

1. B : Définition de i .
2. A : La partie imaginaire est réelle.
3. C : Distance à l'origine.
4. B : La forme trigonométrique exige $r > 0$.
5. B : On change le signe de la partie imaginaire.

Erreurs à éviter

- Ne pas écrire $i^2 = 1$.
- Ne pas diviser par zéro.
- Ne pas déterminer un argument sans vérifier le quadrant.

Cours, exemples et exercices originaux Renfo Plus, structurés à partir des thèmes des fiches locales. Les documents sources ne sont pas republiés.